

授课教师	林麦麦	授课名称	数学的智慧与乐趣	授课班级		授课地点	
授课时数	2学时	课程类型	大学科综合课	授课时间			
章节名称	第四章 概率 运筹与对策						
参考资料	《乐在其中的数学》 《啊哈！原来如此（中译本）》 《生活中的魔法数学》 《思考的乐趣：Matrix67 数学笔记》 《数学与对称》		谈祥柏 著 （美）伽德纳 著；李建臣，刘正新 译 （美）亚瑟·本杰明，迈克尔·谢尔默 著 李旭大 译 顾森 著 丘成桐，刘克峰，杨乐 著		科学出版社 科学出版社 中国传媒大学出版社 人民邮电出版社 高等教育出版社		
教学目标	<p>一、知识和技能目标：</p> <p>1. 要求学生能够通过学习了解概率论、运筹学与对策论的典型趣味问题；</p> <p>2. 要求学生通过具体问题的深入探讨，初步了解并掌握概率、运筹与对策的趣味计算、逻辑推理等方面的基础问题。</p>						
	<p>二、过程和方法目标：</p> <p>1. 注意借助具体问题，引入概率论、运筹学与对策论的基本思想方法、基础趣味问题，广泛开阔学生的眼界；</p> <p>2. 通过具体的深入探讨，有效激发学生对概率、运筹与对策的浓厚兴趣。</p>						
教学重点	古今中外概率、运筹与对策的典型趣味问题						
教学难点	问题的起源背景、一般解决思路与技巧性处理方法						

<p><b>学习内容分析</b></p>	<p>“第四章 概率 运筹与对策”是《数学的智慧与乐趣》的基础内容，本章的主要内容将促使学生初步了解并深刻理解概率、运筹与对策趣味问题的基本起源、一般解决思路和具体的趣味性解决方案。对于首次接触本门课程的学生而言，利用直观、具体且易于理解的数学典型问题，展示数学问题的技巧性解决过程至关重要。这将帮助学生有效地激发对数学的学习兴趣，良好地掌握数学问题解决的基本思想、定义内涵及其趣味解决过程。</p>
<p><b>学生分析</b></p>	<p>授课教师通过新课内容的引入介绍，帮助学生有效扭转以往认为数学“枯燥计算、无聊理论”的基本印象。关于古今中外各类概率、运筹与对策趣味问题的解决思路探讨、具体步骤实施、数学工具应用的详细介绍，将激发学生对数学问题探讨的积极性，并良好地把握数学问题的思想来源、定义内涵、解决途径及其有效应用。</p>
<p><b>教学设计思路</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 首先说明本章的主要内容，明确学习目标、学习重点和学习难点；</li> <li>2. 依据简单直观的具体概率、运筹与对策趣味问题，明确该问题的起源背景、基本特征，提出解决问题的一般思想方法、具体解决方案和实际操作步骤；</li> <li>3. 参考不同类型问题的具体解决方法，探讨数学应用学科的重要思想方法的灵活应对策略；</li> <li>4. 依照具体问题的归纳总结，提出数学问题处理方法和思路的广泛灵活应用，并以严格的数学描述形式予以展示，通过注意事项的加强说明，使学生明确相应问题的表述形式、深刻含义、存在条件及其应用意义，从而使学生能够较为准确地把握典型的数学趣味问题。</li> </ol>
<p><b>学习方法</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 通过具体问题的详细讨论过程，了解解决各种不同类型的数学趣味问题的基本思想方法和具体操作步骤，注意引导学生对数学问题的基本概念进行深入分析和全面掌握；</li> <li>2. 对于具体问题的详细介绍，要求逐条展开，同时借助问题背景、性质特征、几何解释和理论说明加强学生对具体问题的有效掌握，并明确该问题的基本用途和使用价值。</li> </ol>

教 学 过 程		
教学环节安排	教学内容	教学方式媒体使用
新课引入	 <p>第四章 概率、运筹与对策</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 介绍本章的主要学习内容；</li> <li>2. 简要介绍数学学科的重要分支：概率论与数理统计、运筹学和对策论，并结合具体实例帮助学生进行理解；</li> </ol>

新课教学

### § 4.1 方程求根赌输赢



1. 写出一个一元三次方程，并留下三处空白：

$$x^3 + ( ? )x^2 + ( ? )x + ( ? ) = 0$$

2. 请甲、乙两人一次填空，甲先乙后，即甲先填一个，乙填一个，甲再填一个，要求填进去的数均为整数，正、负均可；

3. 三个? 填好整数以后，要求该方程必须有三个整数根。甲一定能做到！

**胜券在握的秘诀**

$$x^3 + ( ? )x^2 + ( ? )x + ( ? ) = 0$$

↑  
 $N$

↑  
 $-1$

↑  
 $-N$

1. 介绍问题；

1. 请学生参与解决该问题；
2. 使学生掌握该问题获胜的关键点；

## § 4.2 瓜分赌注

15世纪末，意大利出版的一本讲计算技术的教科书中，著名作家写道：



假使在一次比赛中赢6次才算最终取胜，两名赌徒在一人已赢5次，另一人已赢2次的情况下，因事中断了赌博，那么总的赌金应该按照5比2分给他们两人。



赌金分配的不同看法：

假使要赢16次才算最终取胜，两名赌徒已各赢了15次和12次，按照该作家的分配方案两个赌徒所分到的赌金相差并不多！

但事实上，已经赢了15次的赌徒只要再赢1次就可以把全部赌金拿到手，而他的对手却需要再赢4次才行，所以作家的赌金分配方案似乎不太合理！

数学家卡丹诺(G.Cardano)的看法：

赌金的分配方法不应该是已经赌过的次数，而应是剩下来的次数！ 赌金的分配比例：10:1

数学家帕斯卡和费马的看法：15:1

1. 给出概率论的著名问题；
2. 结合具体问题，请学生分析其合理性；

1. 叙述赌金分配的合理方案呈现的历史背景；

### § 4.3 下赌注问题



赌徒德梅莱(De Mere)在赌博中发现：  
一对骰子掷25次，把赌注押到“至少出现一次双6”  
比把赌注押到“没出现双6”有利，但是他找不出原因，  
后来他请教了法国大数学家帕斯卡才搞明白其中的奥秘。



1. 简要介绍世界四大赌城；
2. 介绍概率论的早期典型模型——博彩业问题；

1. 给出问题；
2. 对该问题进行浅显的分析；



解析:

1. 一对骰子掷1次出现双6的概率:  $\frac{1}{36}$

2. 一对骰子掷1次没出现双6的概率:  $\frac{35}{36}$

3. 一对骰子掷25次都没出现双6的概率:  $\left(\frac{35}{36}\right)^{25} = 0.49447$

4. 一对骰子掷25次至少出现1次双6的概率:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} = 0.50553$$

5. 结论: 把赌注押到“至少出现一次双6”比把赌注押到“没出现双6”有利!

注意:

1. 由于  $\frac{35}{36} < 1$ , 所以, 当  $n$  增大时,  $\left(\frac{35}{36}\right)^n$  将变小;

2. 当掷骰的次数大于25时, 把赌注押到“至少出现1次双6”比把赌注押到“没出现双6”更有利;

3. 由于  $\frac{35}{36} < 1$ , 所以, 当  $n$  减小时,  $\left(\frac{35}{36}\right)^n$  将变大;

4. 当掷骰的次数小于25时, 把赌注押到“没出现双6”比把赌注押到“至少出现1次双6”更有利;

5. 当重复试验次数无限增大时, 小概率事件必然出现!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \right] = 1$$

1. 给出概率论的理论解释;
2. 使学生对概率论具有初步的浅显认识;

1. 对该问题的分析结果进行进一步引申;
2. 针对小概率事件, 通过具体实例再做说明;

#### § 4.4 生日的巧合

$n$ 人中至少两人有相同生日的概率是多少？

(注：每人的生日只计月日)

$$p(n) = 1 - \frac{P_{365}^n}{365^n}$$



美籍华人、概率论专家钟开莱先生

$n$	$p(n)$
5	0.03
10	0.12
20	0.41
30	0.71
40	0.89
50	0.97

1. 提出概率论的著名生日问题；
2. 请学生对结论做出猜测；
3. 针对修读学生直接进行试验，验证结果；
4. 请学生反思原因；

1. 给出理论计算数据的结果



## § 4.5 海盗分宝石



### 海盗分宝石——世界著名逻辑趣题



1. 以引人入胜的影视作品引入问题；

1. 介绍问题；
2. 提出要求，请学生做出分宝石的基本方案，并对其合理性做出综合分析；

### 世界著名逻辑趣题——海盗分宝石

有10名海盗抢到了100颗宝石，宝石不可分割，也不能由数人共享。这些价值连城的赃物究竟应该如何分配？

1. 所有海盗的心都凶狠毒辣，如果能把别人抛入大海，那是他们最喜欢看到的；
2. 所有海盗又十分贪生怕死，在任何情况下都以保全自己的性命为第一；
3. 所有海盗又十分贪婪钱财，蝇头小利也不舍的放弃；
4. 所有海盗都非常聪明，他们会按照对自己最为有利的方式来行事。

海盗的决策顺序：保命、得到宝石、欣赏抛别人下海。

### 海盗分宝石的具体操作

1. 将所有海盗按照力量强弱依次排号，力量最弱的为1号，次弱的为2号，···，最强的为10号；
2. 由最厉害的一名海盗提出一种分配方案，然后所有海盗就此方案进行表决。表决办法遵循简单多数原则，即只要有50%的人同意，即可获得通过；否则，提出分配方案的海盗众怒难犯，将被大家抛入大海喂鲨鱼。然后再由剩下的、威力最强的海盗重复以上过程。
3. 如果你是一名海盗，分配方案如何才能使自己保住性命、不被抛下海喂鱼、且可以分得宝石？

请学生把握解决问题的关键点；

海盗分宝石的具体操作示例1  
假设只有两名海盗(排号为1号和2号)



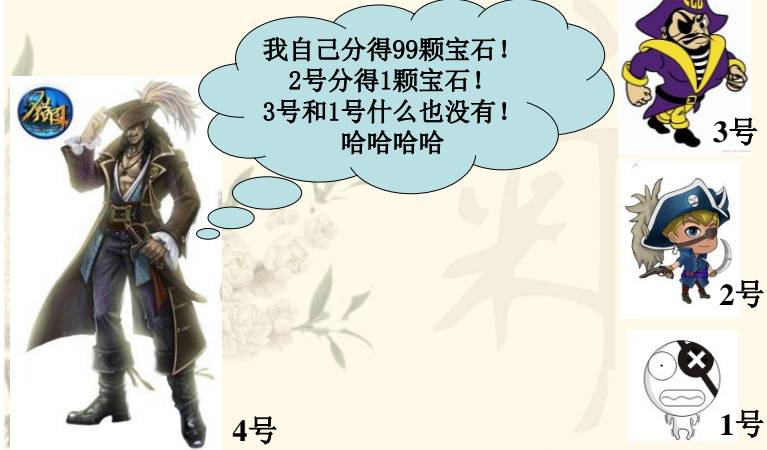
海盗分宝石的具体操作示例2  
假设有三名海盗(排号为1号, 2号和3号)



1. 结合直观图示, 做出由简到难的逐步讨论;

1. 给出问题的最终解决方案;
2. 请学生对该问题进行全面分析;

### 海盗分宝石的具体操作示例3



### § 4.6 扑克游戏话输赢



1. 介绍扑克游戏与概率论的密切关系；
2. 介绍扑克的形成过程、历史发展及其现状；



马其顿帝国 查尔斯一世 罗马帝国 以色列国王  
国王 法兰克国王 国王 所罗门之父



亚历山大



沙勒曼



恺撒



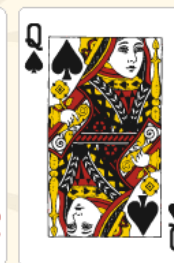
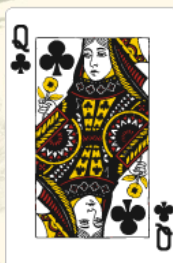
戴维

阿金尼  
皇后

莱克尔  
皇后

朱尔斯  
皇后

希腊的智慧  
和战争女神



帕拉斯·阿西纳

1. 介绍扑克牌中 K 的由来;

1. 介绍扑克牌中 Q 的由来;

阿瑟王的著名骑士      查尔斯一世的侍从      查尔斯七世的侍从      查尔斯一世的侍从



兰斯洛特      罗兰      拉海亚      霍克拉

### 扑克游戏

52张牌彻底洗过，从中抽取5张牌，则决定胜负的游戏规则为：



1. 介绍扑克牌中 J 的由来；

1. 以典型的扑克游戏为例，引入问题；
2. 请学生思考游戏中决定胜负的牌面，其原因所在；



### 扑克游戏规则解析

52张牌彻底洗过，从中抽取5张牌的组合数为：

$$C_{52}^5 = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 2598960$$

1. 顺子：五张牌不论花色，  
但要求其点数必须成为等差数列，  
点数最小的牌可以是一点到十点。

概率：

$$p = \frac{10 \times 4^5}{2598960} \approx 0.00394$$

2. 同花：五张牌要求其花色统一。

概率：

$$p = \frac{4 \times C_{13}^5}{2598960} = \frac{4 \times \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}}{2598960} \approx 0.001981$$

3. 满贯：五张牌要求有三张同点与两张同点。

概率：

$$p = \frac{(13^2 - 13) \times C_4^3 \times C_4^2}{2598960} = \frac{3744}{2598960} \approx 0.0014406$$

1. 利用排列组合的基本知识，结合概率论的古典概型，引导学生讨论该问题；
2. 对牌面的概率论结果予以说明，方便学生理解该内容；

1. 说明牌面要求，利用概率论结果进行解释；

4. 四条：五张牌中的四张点数相同，而另一张任意

概率：

$$p = \frac{C_{13}^1 \times (52 - 4)}{2598960} = \frac{624}{2598960} \approx 0.0002401$$

5. 同花顺 五张牌既是同花又是顺子

概率：

$$p = \frac{10 \times 4}{2598960} = \frac{40}{2598960} \approx 0.00001539$$

### 扑克游戏

52张牌彻底洗过，从中抽取5张牌，则决定胜负的游戏规则为：

同花顺子 0.00001539

胜

四条 0.0002401

胜

满贯 0.0014406

胜

同花 0.001981

胜

顺子 0.00394

1. 从概率论角度对扑克游戏中胜负牌面的规定，做出合理解释，并帮助学生予以理解；

### § 4.7 蒙特霍尔问题

这里有三扇门，其中一扇门的后面有一辆汽车，另外一扇门的后面是一只垃圾桶，还有一扇门的后面是价值微不足道的奖品。你可以从中选择一扇门，选定以后，这扇门后面的东西就归你了！



哇！



1号门



2号门



3号门



我先帮你打开2号门！

现在给你个机会，允许改变原来的选择，要变吗？

3号门！



1号门



2号门



3号门



1. 介绍蒙特霍尔问题；
2. 请学生共同参与；

1. 从概率论角度，对该问题进行解释；

#### § 4.8 确诊率问题

某病被诊断出的概率为0.95，无该病误诊有该病的概率是0.002，如果某地区患该病的比例为0.001，现随机选该地区一人，诊断患有该病，求该人确实患有该病的概率。

解：B = 该人患有该病 A = 该人诊断患有该病

$$\begin{aligned}P(B|A) &= \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} \\ &= \frac{0.001 \times 0.95}{0.001 \times 0.95 + 0.999 \times 0.002} \\ &= 0.32225\end{aligned}$$

#### § 4.9 人寿保险问题



1. 结合现实生活中的医疗问题，介绍确诊率问题；
2. 以现实例子说明误诊的不可避免性，但也要强调关于误诊的合理看待方式；
3. 从概率论的科学角度分析误诊问题；

1. 介绍保险业的基本知识；

### 保险公司的获利问题

有2500个同年龄段同社会阶层的人参加某保险公司的人寿保险。根据以前的统计资料，在一年里每个人死亡的概率为0.0001。每个参加保险的人一年里付给保险公司120元保险费，而在死亡时其家属从保险公司领取20000元，求(不计利息)下列事件的概率：

$A$  = “保险公司亏本”，

$B$  = “保险公司一年获利不少于十万元”。

解：设2500人中有 $k$ 人死亡，则保险公司亏本当且仅当 $20000k > 2500 \times 120$ ，即 $k > 15$

$$P(A) = \sum_{k=16}^{2500} C_{2500}^k (0.0001)^k (0.9999)^{2500-k} \approx 0.000001$$

保险公司亏本几乎是不可能的！

保险公司一年获利不少于十万元等价于：  
 $2500 \times 120 - 20000k \geq 10^5$ ，即 $k \leq 10$ ，故

$$P(B) = \sum_{k=0}^{10} C_{2500}^k (0.0001)^k (0.9999)^{2500-k} \approx 0.999993662$$

保险公司一年获利十万元几乎是必然的！

1. 介绍具体问题；
2. 利用概率论常识进行分析讨论；

1. 通过排列组合的计算方法，说明概率论的科学结果；
2. 对相关结论进行说明，帮助学生进行理解；



### 保险公司的竞争策略之一

对2500个参保对象(每人死亡率为0.0001) 每人每年至少收多少保险费才能够使公司以不小于0.99的概率每年获得不少于十万元的收益?

解: 设每人每年所交的保险费为 $x$ 元, 则保险公司一年获利不少于十万元则 $2500x - 20000k \geq 10^5$ , 即 $x \geq 8k + 40$ , 又因

$$\sum_{k=0}^{2500} C_{2500}^k (0.0001)^k (0.9999)^{2500-k} = 0.99784 > 0.99$$

故  $x \geq 56$

### 保险公司的竞争策略之二

在死亡率和赔偿费不变的情况下, 每人每年交给保险公司20元保险费, 保险公司至少需要吸引多少参保者才能以不小于0.99的概率不亏本?

解: 设 $y$ 为参保人数,  $k$ 为参保者的死亡人数, 则保险公司不亏本 $20y - 20000k \geq 0$ , 即 $y \geq 1000k$ , 又因

$$\sum_{k=0}^{1000} C_{1000}^k (0.0001)^k (0.9999)^{1000-k} = 0.99532$$

故 保险公司只需吸引1000人参保就能以不小于0.99的概率不亏本

1. 介绍保险公司的不同竞争策略:



#### § 4.10 福利彩票



#### 福利彩票的游戏规则

号码总数为01-35，基本号码数为7，特别号码数为1，设奖等级数为1-7级。各等奖设置情况如下：

- 一等奖：选7中7
- 二等奖：选7中6+1
- 三等奖：选7中6
- 四等奖：选7中5+1
- 五等奖：选7中5
- 六等奖：选7中4+1
- 七等奖：选7中4或选7中3+1

1. 介绍概率论的另一个重要模型——彩票；

1. 说明彩票的游戏规则；

各等奖奖金设置情况如下：

每注彩票价值2元，每期将销售彩票总金额的50%用来给奖，每注四、五、六、七等奖的奖金分别为500元、50元、10元、5元。在剩余的金額中，一、二、三等奖的奖金分别占75%、10%、15%。而且每期一等奖保底金额为200万元，封顶金额为500万元。如果某期没有一等奖，一等奖的奖金累积到下一期一等奖的奖金中。如果某期有几注同时买中一(二、三)等奖，则这几注平分该期一(二、三)等奖的奖金。

单注获奖概率  $\sum_{k=1}^7 p_k = 0.033485$

一等奖：选7中7  $p_1 = P(A_7 B_0) = 1.487095 \times 10^{-7}$

二等奖：选7中6+1  $p_2 = P(A_6 B_1) = 1.0409665 \times 10^{-6}$

三等奖：选7中6  $p_3 = P(A_6 B_0) = 2.810061 \times 10^{-5}$

四等奖：选7中5+1  $p_4 = P(A_5 B_1) = 8.4318 \times 10^{-5}$

五等奖：选7中5  $p_5 = P(A_5 B_0) = 1.0961737 \times 10^{-3}$

六等奖：选7中4+1  $p_6 = P(A_4 B_1) = 1.826896 \times 10^{-3}$

七等奖：选7中4或选7中3+1

$$p_7 = P(A_4 B_0) + P(A_3 B_1) = 3.0448269 \times 10^{-2}$$

1. 给出彩票的奖励规定；

1. 利用概率论的计算方法给出合理科学的结果；

2. 引导学生合理看待彩票；

	 <p style="text-align: center;"><b>§ 4.11 第5次掷出几点</b></p> <p>重复掷一颗骰子，已知前4次的结果都是6点，问第5次将掷出几点？</p> <p>答案：  <b>第5次仍然掷出6点!!! 骰子动了手脚!</b>      若骰子均匀对称，则：      每次掷出<i>i</i>点的概率为：<math>\frac{1}{6} (i = 1, 2, \dots, 6)</math>      4次都掷出6点的概率为：<math>\left(\frac{1}{6}\right)^4 &lt; 0.0008</math>  <b>小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的!</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 给出问题；</li> <li>2. 请学生进行解答；</li> <li>3. 解释正确答案，指导学生突破惯性思维的错误结论；</li> </ol>
<p style="text-align: center;">课堂小结</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 对于非理工科学生来讲，本章内容较难理解，所以在具体的授课过程中，授课教师应当充分利用现实生活中常见的概率、运筹与对策问题，帮助学生理解；</li> <li>2. 通过概率论的严谨科学体系、严格计算过程，令学生看到对问题的科学看待方式；</li> </ol>	
<p style="text-align: center;">课后反思</p>		